

Adı-Soyadı:

Numarası:

30.11.2023

2023-2024 GÜZ DÖNEMİ CEBİR I DERSİ ARA SINAV SORULARI

1) a) a ve b pozitif tam sayılar olmak üzere a 'nın b 'ye bölümünden kalan r ise $(a, b) = (b, r)$ olduğunu gösteriniz.

b) $113x \equiv 7 \pmod{239}$ lineer kongrüansının tüm çözümlerini bulunuz.

2) a) \mathbb{Q} üzerinde her $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in \mathbb{Q}$ için $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{ad - bc}{bd}$ ile tanımlanan $*$ işleminin varsa birimini bulunuz.

b) $[a, b] = 100, (a, b) = 10$ olacak şekilde tüm a, b doğal sayılarını bulunuz.

3) $G = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}, b \neq 0\}$ veriliyor. Her $(a, b), (c, d) \in G$ için

$$(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$$

ile tanımlanıyor. Bu durumda $(G, *)$ ikilisi grup olur mu? Araştırınız.

4) a) G bir grup $H \leq G$ olsun. $K = \{x \in G : x = aha^{-1}, h \in H\}$ kümesi G 'nin bir alt grubu mudur? Araştırınız.

b) G bir grup olsun. Her $a, b \in G$ için $(ab)^2 = a^2b^2$ ise G değişmeli olur mu? Araştırınız.

5) S_7 de $\sigma = (1 2 3 4)(5 6 7)(2 6 1)(4 7)$ ve $\rho = (1 2 3 4 5)(6 7)(1 3 5 7)(1 6)$ permütasyonları veriliyor.

a) Yukarıdaki σ ve ρ permütasyonlarını ayrıık devirlerin çarpımı şeklinde yazıp mertebelerini hesaplayınız.

b) $\sigma\rho\sigma^{-1}$ 'i bulup mertebesini hesaplayınız.

Başarılar...

Prof. Dr. Şenol EREN

Cevap Anahteri

1 a) $(a, b) = (b, r)$ olduğunu gösterelim.

$(a, b) = d$, $(b, r) = k$ olsun. $d|a \wedge d|b \Rightarrow$

$$a = bq + r \Rightarrow r = a - bq \Rightarrow d|r \text{ olup } d|k \text{ ①}$$

$$k|b \wedge k|r \Rightarrow a = bq + r \Rightarrow k|a \text{ olup } k|d \text{ ②}$$

$k = d$ bulunur.

$$b) \quad 239 = 2 \cdot 113 + 13$$

$$113 = 8 \cdot 13 + 9$$

$$13 = 1 \cdot 9 + 4$$

$$9 = 2 \cdot 4 + 1$$

$$4 = 4 \cdot 1 + 0$$

$$1 = -26 \cdot 239 + 55 \cdot 113$$

$$7 = -182 \cdot 239 + 385 \cdot 113$$

$$\bar{7} = \overline{146} \text{ bulunur.}$$

2- a) $e = 0$ bulunur.

b) $a \cdot b = [a, b]$. $(a, b) = 1000$ $10|a \wedge 10|b$

$$a = 10k, b = 10t \Rightarrow k \cdot t = 10$$

$$(k, t) = (1, 10), (2, 5), (5, 2), (10, 1) \text{ olup}$$

$$(a, b) = (10, 100), (20, 50), (50, 20), (100, 10) \text{ bulunur.}$$

3- $\forall (a, b), (c, d) \in G$ için $(a, b) * (c, d) = (a + bc, bd)$
 G 'nin elemanı olup kapalı ayrıca iyi tanımlıdır.

$$(a, b) * ((c, d) * (e, f)) = (a, b) * (c + de, df)$$

$$= (a + b(c + de), bdf) \leftarrow$$

$$((a, b) * (c, d)) * (e, f) = (a + bc, bd) * (e, f)$$

$$= (a + bc + bde, bdf) \leftarrow$$

$$e = (0, 1) \text{ olup } (a, b)^{-1} = \left(-\frac{a}{b}, \frac{1}{b}\right) \text{ olup}$$

grup tur.

$$4- a) K = \{x \in G \mid x = ah\bar{a}', h \in H\}$$

$$e \in G \text{ için } e = ae\bar{a}' \text{ olup } K \neq \emptyset$$

$$x = ah_1\bar{a}', y = ah_2\bar{a}', x, y \in K \Rightarrow$$

$$xy^{-1} = (ah_1\bar{a}')(ah_2\bar{a}')^{-1} = (ah_1\bar{a}')(ah_2^{-1}\bar{a}') \\ = a(h_1h_2^{-1})\bar{a}' \in K \text{ olup } K \leq G$$

$$b) (ab)^2 = a^2b^2 \Rightarrow (ab)(ab) = aabb$$

$$\Rightarrow abab = aabb \Rightarrow ba = ab$$

olup değişmelidir.

$$5- a) \sigma = (1345627) \quad \rho = (1723)(456)$$

$$o(\sigma) = 7 \quad o(\rho) = 12$$

$$b) \sigma\rho\sigma^{-1} = (3174)(562)$$

$$o(\sigma\rho\sigma^{-1}) = 12 \\ \text{bulunur.}$$